T–1. Feladat

Bizonyítsd be, hogy az összes a, b, c pozitív valós számra, melyekre $abc = 1$, teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{a}{2b + c^2} + \frac{b}{2c + a^2} + \frac{c}{2a + b^2} \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

T–2. Feladat

Add meg az összes $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ függvényt, melyre

$$f(x^2 y f(x)) + f(1) = x^2 f(x) + f(y)$$

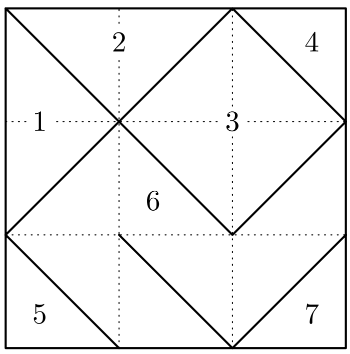
teljesül bármely x és y nem nulla valós számra.

T–3. Feladat

Az 1-től n-ig számozott helyekre sorba állítottak n tanulót. Amíg a tanár nem figyelt oda, átrendeződtek. Mire a tanár visszafordul, újra egy sorban állnak. Ha egy diák eredetileg az i. helyen állt, most pedig a j. helyen, akkor azt mondjuk, hogy $|i - j|$ lépést tett. Számold ki a lehető legnagyobb értéket, ami a lépések összege lehet.

T–4. Feladat

Legyen N egy pozitív egész szám. Egy $N \times N$-es táblázat mind az N^2 egységmezőjének be van rajzolva az egyik átlója. Ezek az átlók az $N \times N$-es táblázatot K régióra osztják. Minden N-re határozd meg K lehető legkisebb, illetve legnagyobb értékét.



Példa $N = 3$-ra és $K = 7$-re

T–5. Feladat

Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, melyre $AB < AC$. Mutasd meg, hogy létezik egy D pont a következő tulajdonsággal: amennyiben az X és Y különböző pontok az ABC háromszög belsejében fekszenek úgy, hogy a B, C, X és Y pontok egy körre illeszkednek, továbbá

$$\angle AXB - \angle ACB = \angle CYA - \angle CBA$$

is teljesül, akkor az XY egyenes átmegy D ponton.

T–6. Feladat

Legyen I az ABC háromszög beírt körének középpontja, és messe az AI egyenes a BC oldalt a D pontban. Tegyük fel, hogy a P pont a BC egyenesen van, és teljesül rá, hogy $PI = PD$. Továbbá legyen J az I pont képe a BC felezőmerőlegesére való tükrözés után, valamint legyen Q az ABC illetve APD háromszögek körülírt köreinek másik metszéspontja. Bizonyítsd be, hogy $\angle BAQ = \angle CAJ$.

T–7. Feladat

Add meg az összes (a, b) pozitív egész számpárt, melyre

$$a! + b! = a^b + b^a.$$

T–8. Feladat

Legyen $n \geqslant 2$ egész szám. Add meg azon m pozitív egészek számát, melyre $m \leqslant n$ és $m^2 + 1$ osztható n-nel.