I–1. Feladat

Add meg az összes olyan $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szürjektív függvényt, amelyre minden a és b pozitív egészre a következő két egyenlet közül pontosan az egyik teljesül:

$$f(a) = f(b),$$
$$f(a+b) = \min\{f(a), f(b)\}.$$

Megjegyzés: $\mathbb{N}$ a pozitív egészek halmazát jelöli. Az $f\colon X \to Y$ függvényt szürjektívnek nevezzük, ha minden $y \in Y$-hoz létezik $x \in X$, hogy $f(x) = y$.

I–2. Feladat

Legyen $n \geqslant 3$ egész szám. Egy *egyszerű n-szög belső átlója* olyan átló, ami az n-szögön belül található. Jelölje $D(P)$ egy P egyszerű n-szög összes belső átlójának számát, és jelölje $D(n)$ azt a lehető legkisebb számot, amit $D(Q)$ felvehet, ahol Q egy egyszerű n-szög. Bizonyítsd be, hogy akkor és csak akkor nem metszi egymást P semelyik két belső átlója (a közös végpontoktól eltekintve), ha $D(P) = D(n)$.

Megjegyzés: Az egyszerű n-szög egy önmagát nem metsző n csúcsú sokszög. A sokszög nem feltétlenül konvex.

I–3. Feladat

Adott az $ABCD$ húrnégyszög. Húzzunk párhuzamost B-n keresztül AC-vel és A-n keresztül BD-vel, ezek metszéspontja legyen E. Az EC illetve ED egyenesek másik metszéspontja az AEB háromszög körülírt körével legyen F illetve G. Bizonyítsd be, hogy C, D, F és G pontok egy körre illeszkednek.

I–4. Feladat

Add meg az összes olyan (m, n) pozitív egész számpárt, melyekhez léteznek a és b egynél nagyobb, relatív prím számok úgy, hogy

$$\frac{a^m + b^m}{a^n + b^n}$$

kifejezés egész.

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.
Kérdéseket csak az első 60 percben lehet feltenni.
Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.