T–1. feladat

Határozd meg a következő kifejezés legkisebb lehetséges értékét:

$$\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a+y}+\frac{1}{b+x}+\frac{1}{b+y}\,,$$

ahol a, b, x, és y olyan pozitív valós számok, amelyek kielégítik a következő egyenlőtlenségeket:

$$\frac{1}{a+x}\geqslant\frac{1}{2},\quad \frac{1}{a+y}\geqslant\frac{1}{2},\quad \frac{1}{b+x}\geqslant\frac{1}{2}\quad \text{és}\quad \frac{1}{b+y}\geqslant 1\,.$$

T–2. feladat

Határozd meg az összes $f\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ függvényt, amelyre

$$xf(xy)+xyf(x)\geqslant f(x^2)f(y)+x^2y$$

teljesül minden $x, y\in\mathbb{R}$ esetén.

T–3. feladat

Legyenek K és L pozitív egész számok. Egy $2K\times 2L$ egységnégyzetből álló táblán egy hangya a bal alsó sarokból indulva útra kel, melynek végén a jobb felső sarokba érkezik. Egy négyzetről minden alkalommal valamelyik szomszédos mezőre halad tovább, függőleges vagy vízszintes irányban. Nincs olyan mező, amelyre többször is ellátogatna. Lehetnek azonban olyan mezők, amelyekre nem látogat el egyszer sem az út során.
Bizonyos esetekben a meg nem látogatott mezők együtt egy téglalapot alkotnak. Ilyenkor a kihagyott téglalapot MEMO*rábilis*nek nevezzük.

Határozd meg a MEMO*rábilis* téglalapok számát.

Megjegyzés: A számolás során különbözőnek tekintünk két téglalapot, ha nem pontosan ugyanazokból az egységnégyzetekből állnak össze.

T–4. feladat

Vidámvárosnak 2014 lakosa van, nevezzük őket $A_1, A_2, \ldots, A_{2014}$-nek. Akármelyik pillanatban is vizsgáljuk meg akármelyiküket, kedélyállapotát jellemezhetjük a *vidám* és a *szomorú* szavak egyikével. Egy lakos kedélyállapota akkor és csak akkor változik meg (vidámról szomorúra, illetve szomorúról vidámra), ha rámosolyog egy vidám ember. Egy hétfő reggelen N lakos volt vidám a városban.

A következő történt a hétfői nap során: A_1 lakos rámosolygott A_2-re, azután A_2 mosolygott A_3-ra, és így tovább, utolsóként A_{2013} mosolygott rá A_{2014}-re. A felsoroltakon kívül senki se mosolygott másra a nap folyamán. Pontosan ugyanez megismétlődött kedden, szerdán és csütörtökön is. Csütörtök estére pontosan 2000 vidám lakosa lett a városnak.

Határozd meg N legnagyobb lehetséges értékét.

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.
Kérdéseket csak az első 60 percben lehet feltenni.
Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.

T–5. feladat

Az ABC háromszögben legyen $AB < AC$. A háromszög I középpontú beírt köre a BC, CA és AB oldalakat rendre a D, E és F pontokban érinti. Az AI szögfelező a DE és DF egyeneseket rendre X és Y pontokban metszi. Jelölje Z az A-ból BC-re állított merőleges talppontját.

Bizonyítsd be, hogy D az XYZ háromszög beírt körének középpontja.

T–6. feladat

Az ABC háromszög k beírt köre érintse a BC oldalt a D pontban. Az AD egyenes és a k kör D-től különböző metszéspontja legyen L, továbbá jelölje az ABC háromszög A-val szemközti hozzáírt körének középpontját K. Végül legyenek M és N rendre a BC és KM szakaszok felezőpontjai.

Bizonyítsd be, hogy a B, C, N és L pontok egy körön helyezkednek el.

T–7. feladat

Pozitív egész számok egy véges A halmazát *középszerű*nek nevezzük, ha minden nemüres részhalmazára igaz, hogy az elemeinek számtani közepe is egy egész szám. Másképpen fogalmazva: A középszerű, ha $\frac{1}{k}(a_1 + \ldots + a_k)$ egész szám, akárhogyan is választunk egy $k \geqslant 1$ egész számot és hozzá különböző $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A$ elemeket.

Adott n pozitív egész esetén, határozd meg a legkisebb egész számot, ami előáll egy n-elemű középszerű halmaz elemeinek összegeként.

T–8. feladat

Határozd meg az összes, pozitív egészekből álló (x, y, z, t) számnégyest, amely teljesíti a következő egyenletet:

$$20^x + 14^{2y} = (x + 2y + z)^{zt}.$$

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.
Kérdéseket csak az első 60 percben lehet feltenni.
Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.