Language: Hungarian

7. Közép-Európai Matematikai Olimpia

Csapatverseny

2013. augusztus 25.

T-1. feladat Határozzátok meg az összes olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre

$$f(xf(x) + 2y) = f(x^2) + f(y) + x + y - 1$$

teljesül minden x, $y \in \mathbb{R}$ esetén.

T-2. feladat Legyenek $x, y, z, w \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olyan számok, melyekre $x + y \neq 0$, $z + w \neq 0$, és $xy + zw \geq 0$. Bizonyítsátok be a következő egyenlőtlenséget:

$$\left(\frac{x+y}{z+w} + \frac{z+w}{x+y}\right)^{-1} + \frac{1}{2} \geq \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right)^{-1} + \left(\frac{y}{w} + \frac{w}{y}\right)^{-1}.$$

T-3. feladat $n \geq 2$ ház áll egy utca északi oldalán. Nyugatról kelet felé haladva 1-től n-ig számozták meg őket. A házszámot minden házon egy tábla mutatja. Egy nap az utca lakói, hogy megviccelják a postást, összekeverik a házszámaikat a következő módon: minden szomszédpár, a nap folyamán pontosan egyszer, kicseréli egymás közt az aktuálisan a házukon levő táblát.

Hányféle különböző sorozata állhat elő a házszámoknak a nap végére?

T-4. feladat Néhány pontot szeretnénk megadni a síkon úgy, hogy semely három ne essen egy egyenesre, és rendelkezzenek a következő tulajdonsággal: ki lehet őket színezni pirossal és zölddel úgy, hogy minden háromszög, melynek csúcsai azonos színű pontok, a belsejében tartalmaz legalább egy ellenkező színű pontot.

Legfeljebb hány pont adható meg így?

T-5. feladat Adott az ABC hegyesszögű háromszög. Szerkesszetek olyan PQR háromszöget, amelyre teljesül, hogy $AB = 2PQ$, $BC = 2QR$ és $CA = 2RP$; továbbá a PQ, QR és RP egyenesek rendre áthaladnak az A, B és C pontokon. (Az A, B, C, P, Q, és R pontok mind különböznek).

T-6. feladat Az ABC háromszög egy K belső pontjára teljesül, hogy BC az AKB és az AKC háromszögek köréírt körének közös érintője. Jelölje D a CK és az AB egyenesek metszéspontját, és jelölje E a BK és az AC egyenesek metszéspontját. Legyen továbbá F a BC egyenes és a DE szakasz felezőmerőlegesének metszéspontja. Jelölje k az F középpontú, FD sugarú kört. Az ABC háromszög köréírt köre és k messe egymást a P és Q pontokban.

Bizonyítsátok be, hogy a PQ szakasz a k kör átmérője.

T-7. feladat Egy 2013×2013 mezőből álló táblázatba beírtuk a számokat 1-től 2013^2-ig, soronként haladva. Ezután a táblázat azon sorait és oszlopait, melyek tartalmaznak négyzetszámot, töröljük.

Hány mező marad meg?

T-8. feladat A következő kifejezés szerepel egy táblán:

$$\pm \square \pm \square \pm \square \pm \square \pm \square \pm \square$$

Két játékos, A és B, egy játékot játszik. A kezd, majd felváltva lépnek. Minden lépésben, a soron következő játékos kicserél egy $\square$ jelet egy pozitív egész számra. Miután az összes $\square$ jelet kicserélték, az A játékos az összes $\pm$ jelről külön-külön eldöntheti, hogy $+$ legyen vagy $-$. A nyer, ha a táblán levő kifejezés értéke nem osztható a $11, 12, \ldots, 18$ számok egyikével sem. Egyébként B nyer.

Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.
Kérdéseket csak az első 60 percben lehet feltenni.
Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.