5th MIDDLE EUROPEAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

VARAŽDIN 2011 CROATIA

language: Hungarian

# $5^{\text{th}}$ Middle European Mathematical Olympiad

Csapatverseny

2011. szeptember 4.

**T-1. feladat**

Határozzuk meg az összes olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$y^2 f(x) + x^2 f(y) + xy = xyf(x + y) + x^2 + y^2,$$

ahol $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát jelöli.

**T-2. feladat**

Legyenek $a$, $b$, $c$ olyan pozitív valós számok, melyekre

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = 2.$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

**T-3. feladat**

Egy $n \geq 3$ egészre az $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z},\ 1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq n\}$ síkbeli halmazt $\mathcal{M}$-mel jelöljük, ahol $\mathbb{Z}$ az egész számok halmaza.

Legfeljebb mekkora lehet a számossága egy olyan $S \subseteq \mathcal{M}$ részhalmaznak, ami nem tartalmaz három, derékszögű háromszöget meghatározó pontot?

**T-4. feladat**
Legyen $n \geq 3$ egész szám. Egy MEMO-hoz hasonló versenyen részt vevő $3n$ diák összesen $n$ különböző nyelvet beszél, mindegyikük pontosan hármat.

Mutassuk meg, hogy a beszélt nyelvek közül kiválasztható legalább $\left\lceil \frac{2n}{9} \right\rceil$ darab olyan módon, hogy a kiválasztott nyelvek közül kettőnél többet semelyik diák se beszéljen.

($\lceil x \rceil$ a legkisebb egész szám, amely nagyobb vagy egyenlő, mint $x$.)

**T-5. feladat**
Az $ABCDE$ konvex ötszögnek minden oldala ugyanolyan hosszú. Az $AD$ és $EC$ átlók olyan $S$ pontban metszik egymást, melyre $ASE\sphericalangle = 60°$. Bizonyítsuk be, hogy az $ABCDE$ ötszögnek van két párhuzamos oldala.

**T-6. feladat**
Legyen $ABC$ egy hegyesszögű háromszög. Jelölje $B_0$ illetve $C_0$ a $B$ illetve $C$ csúcsból induló magasságvonal talppontját. Legyen $X$ az $ABC$ háromszög belsejében olyan pont, melyre a $BX$ egyenes érinti az $AXC_0$ háromszög körülírt körét, valamint a $CX$ egyenes érinti az $AXB_0$ háromszög körülírt körét. Mutassuk meg, hogy az $AX$ egyenes merőleges a $BC$ egyenesre.

**T-7. feladat**
Legyenek $A$ és $B$ olyan diszjunkt nemüres halmazok, melyekre $A \cup B = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Mutassuk meg, hogy léteznek $a \in A$ és $b \in B$ elemek úgy, hogy $a^3 + ab^2 + b^3$ osztható 11-gyel.

**T-8. feladat**
Egy $n$ pozitív egészt *csodálatos*nak nevezünk, ha léteznek olyan $a, b, c$ pozitív egészek, melyekre

$$n = (b, c)(a, bc) + (c, a)(b, ca) + (a, b)(c, ab)$$

teljesül. Bizonyítsuk be, hogy létezik 2011 egymást követő pozitív egész, melyek mindegyike csodálatos.
(Az $m$ és $n$ pozitív egészek legnagyobb közös osztóját $(m, n)$ jelöli.)

*A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.*
*Kérdéseket az első 45 percben lehet feltenni.*
*Minden feladat 8 pontot ér.*
*A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.*