Language: Hungarian

2nd Middle European Mathematical Olympiad

Olomouc, Czech Republic

INDIVIDUAL Competition, 6th September 2008

I–1. feladat

Legyen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ pozitív egészeknek egy sorozata, melyre $a_n < a_{n+1}$ minden $n \geq 1$-re. Tegyük fel, hogy indexek minden olyan (i, j, k, l) négyesére, melyre $1 \leq i < j \leq k < l$ és $i + l = j + k$, fennáll, hogy $a_i + a_l > a_j + a_k$. Határozzuk meg a_{2008} legkisebb lehetséges értékét.

I–2. feladat

Tekintsünk egy $n \times n$-es sakktáblát, ahol $n > 1$ pozitív egész. Hányféleképpen helyezhető el $2n-2$ ugyanolyan kő a sakktáblán (minden követ különböző mezőre téve) úgy, hogy semelyik kettő ne essen egy átlóra?
(Két kőre akkor mondjuk, hogy egy átlóra esnek, ha a megfelelő mezők középpontjait összekötő szakasz párhuzamos az $n \times n$-es négyzet valamelyik átlójával.)

I–3. feladat

Legyen ABC egy egyenlőszárú háromszög, $AC = BC$. A beírt kör az AB illetve BC oldalt rendre a D illetve E pontban érinti. Egy A-n átmenő (AE-től különböző) egyenes a beírt kört az F és G pontban metszi. Az AB egyenes az EF illetve EG egyenest a K illetve L pontban metszi. Mutassuk meg, hogy $DK = DL$.

I–4. feladat

Adjuk meg az összes olyan k egész számot, melyre minden n egész számra $4n + 1$ és $kn + 1$ relatív prímek.

Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézség, hanem témakör szerint vannak sorba rendezve.
Rendelkezésre álló idő: 5 óra.
Kérdéseket az első 45 percben lehet feltenni.